AN 3.3

Eigenschaften von Funktionen mit Hilfe der Ableitungsfunktion beschreiben können bzw. Funktionsuntersuchung

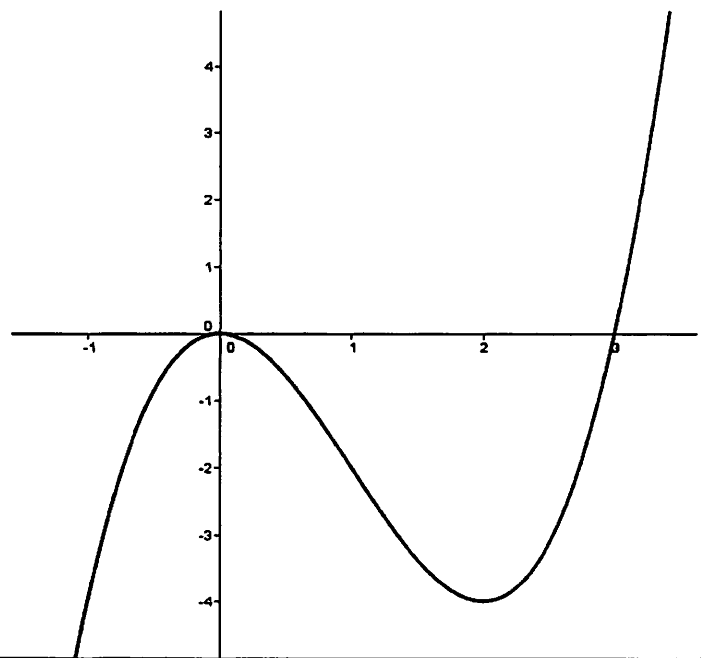
Funktionswerte

Hier:
In (-∞; 0) und (0; 3) ist f <0 (Funktionswerte sind negativ),

an den Stellen x=0 und x=3 ist f=0 (Funktionswerte sind null),

in (3; ∞) ist f>0 (Funktionswerte sind positiv.

allgemein:
f>0: Funktionswerte sind positiv
f<0: Funktionswerte sind negativ
f=0: Funktionswerte sind null



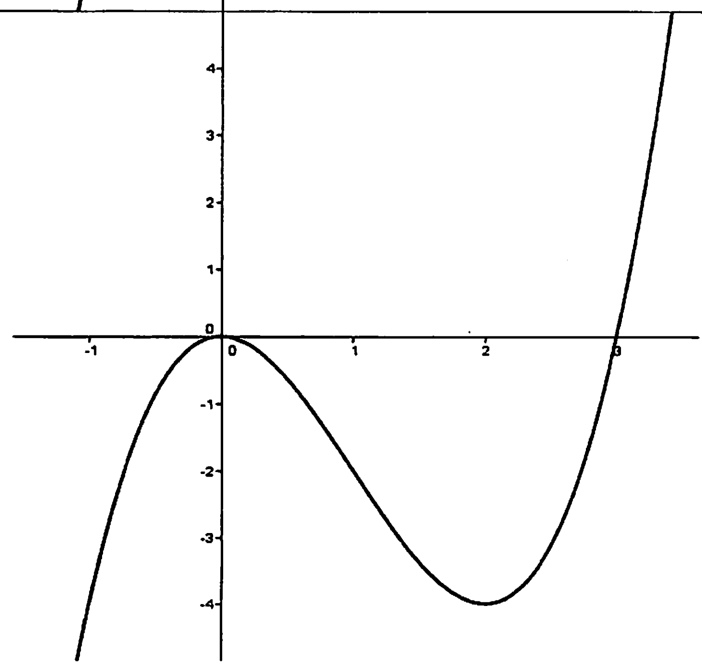
Nullstellen NST

Hier:
zwei NST x=0 und x=3, wobei bei x=0 eine doppelte NST (-> berührt die x-Achse) und bei x=3 eine einfache NST vorliegt.

zugehörige Punkte heißen Nullpunkte
Hier: (0|0), (3|0)

allgemein:
Funktion gleich null setzen f(x)=0,
die Stellen, die man erhält sind die NST

Nullpunkt: x-Koordinate ist die NST,
y-Koordinate ist null



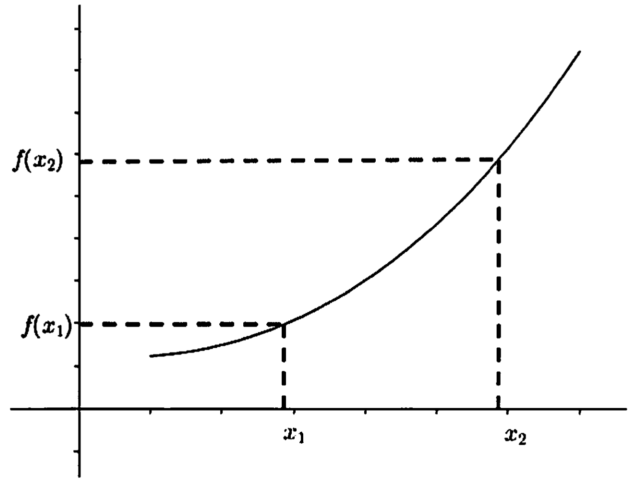
Monotonie ohne 1. Ableitung beschreiben

f ist streng monoton steigend

Für alle $x_1, x_2 \in [a;b]$ gilt:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

d.h. Funktionswerte werden größer

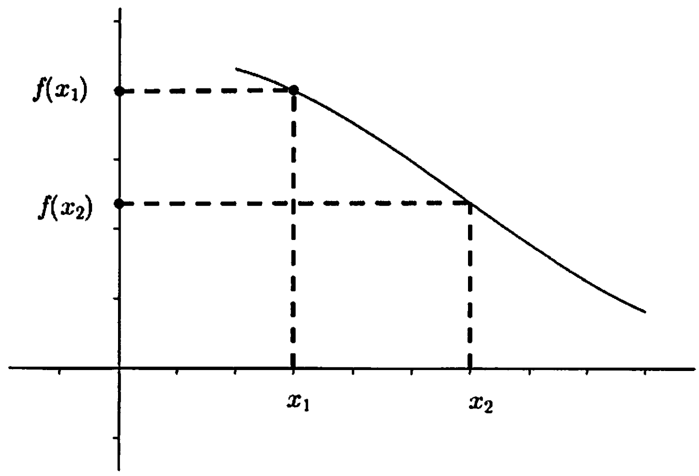


f ist streng monoton fallend

Für alle $x_1, x_2 \in [a;b]$ gilt:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

d.h. Funktionswerte werden kleiner

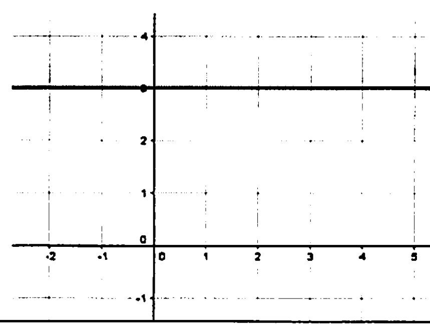


f ist konstant

Für alle $x_1, x_2 \in [a;b]$ gilt:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

d.h. Funktionswerte bleiben gleich

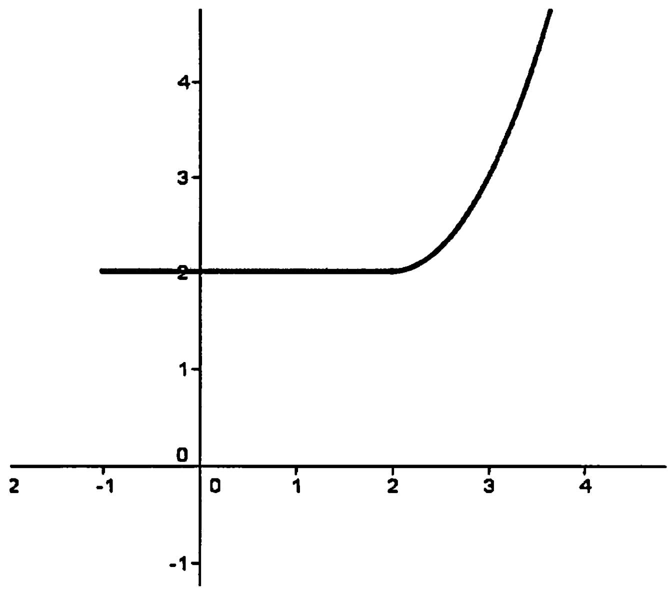


f ist monoton steigend

Für alle $x_1, x_2 \in [a;b]$ gilt:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

d.h. Funktionswerte werden größer oder bleiben gleich

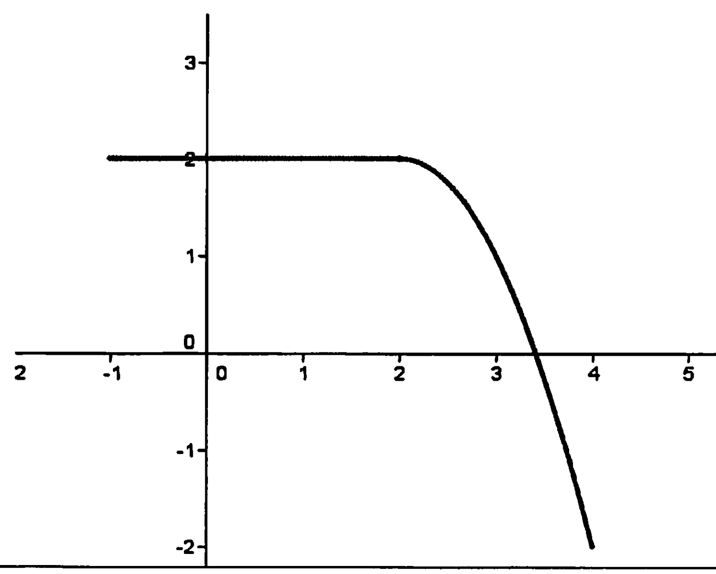


f ist monoton fallend

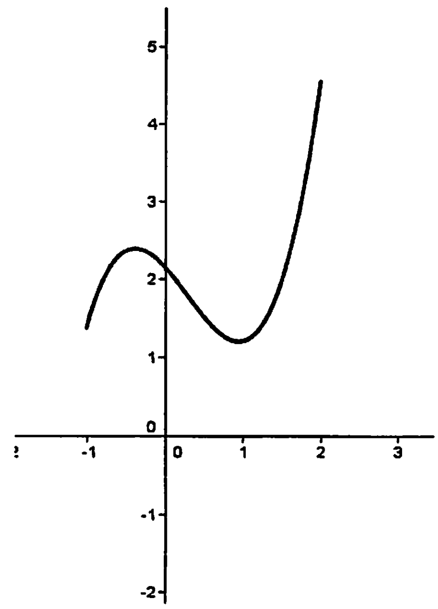
Für alle $x_1, x_2 \in [a;b]$ gilt:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

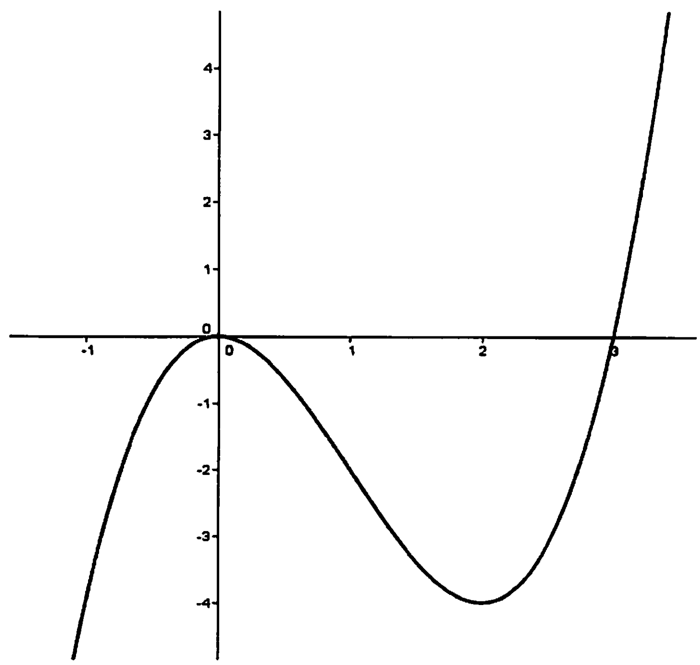
d.h. Funktionswerte werden kleiner oder bleiben gleich



f ist nicht monoton
Wenn f in [a;b]
weder (streng) monoton fallend noch
streng monoton steigend ist



Monotonie mit 1. Ableitung beschreiben
Die 1. Ableitung gibt uns Informationen
über die Monotonie

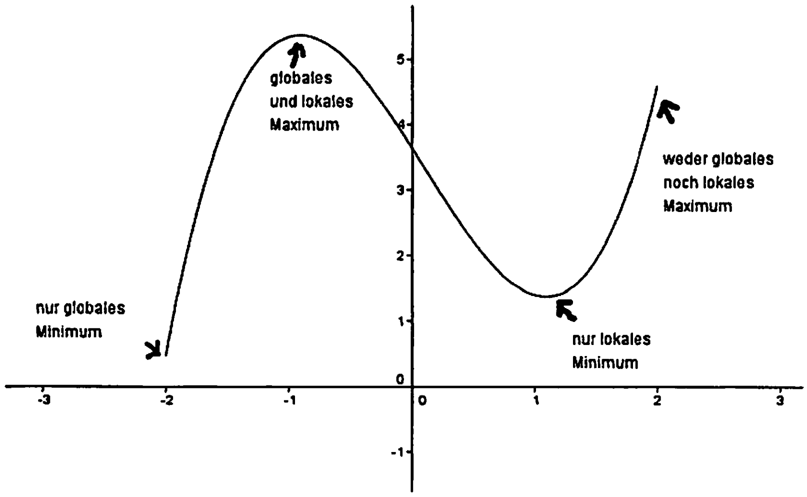


In (-∞; 0] und [2; ∞) ist f streng monoton steigend, weil f' >0 im inneren der Intervalle (Tangenten haben in diesen inneren Intervallen eine positive Steigung),

In [0; 2] ist f streng monoton fallend, weil f'<0 im inneren des Intervalls (Tangenten haben in diesem Intervall eine negative Steigung)

allgemein:
f'(x)>0 für (a;b) ⇒ f streng monoton steigend in [a;b]
f'(x)<0 für (a;b) ⇒ f streng monoton fallend in [a;b]

Extremstellen (Minimum- oder Maximumstellen)
Die zu den Extremstellen gehörigen Punkte nennt man Extrempunkte (Tiefpunkt, Hochpunkt)



Unterscheidung zwischen lokalen und globalen Extremstellen:

Eine lokale Extremstelle ist eine Stelle p, die innerhalb einer Umgebung von p eine Maximum- oder Minimumstelle hat und bei der ein Monotoniewechsel stattfindet.
Tiefpunkt T($p|f(p)$)
Hochpunkt H($p|f(p)$)
An einer lokalen Extremstelle p gilt:
f'(p)=0 und f ändert an der Stelle p ihr Monotonieverhalten ⇒ p ist lokale Extremstelle

Globale Extremstellen,
Eine globale Maximumstelle ist eine Stelle p ∈[a;b], für die gilt: f(p)≥f(x) für alle x in [a;b], d.h. in [a;b] ist an der Stelle p der Funktionswert am größten.
Eine globale Miniumstelle ist eine Stelle p ∈[a;b], für die gilt: f(p)≤f(x) für alle x in [a;b], d.h. in [a;b] ist an der Stelle p der Funktionswert am kleinsten.

Randextrema können nur global sein.

Lokale Extremstellen berechnen
Die Stellen suchen, an denen die die Tangentensteigung waagrecht ist, also $f'(x) = 0$ setzen.

Das Ergebnis sind die Extremstellen.

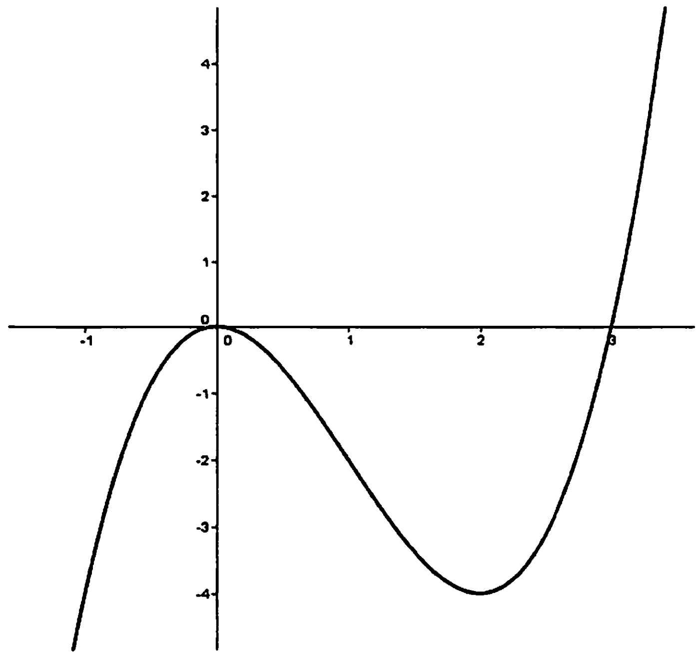
Hier:
x=0 und x=2, d.h. f'(0)=0 und f'(2)=0

Wir wissen jetzt, dass die Extremstellen bei $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ liegen. Aber wir „wissen nicht", ob an diesen Stellen ein MAX oder MIN ist.

Dies entscheidet die 2. Ableitung. Jede Extremstelle muss in die 2. Ableitung eingesetzt werden.

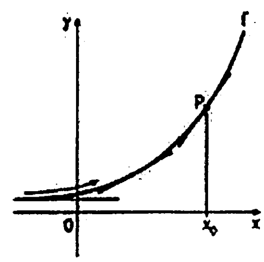
$f''(2) > 0$ dann hat f an dieser Stelle ein Maximum. Wenn 2. Ableitung größer Null ist, dann ist der Graph an dieser Stelle linksgekrümmt.

$f''(0) < 0$ dann hat f an dieser Stelle ein Minimum. Wenn 2. Ableitung kleiner Null ist, dann ist der Graph an dieser Stelle rechtsgekrümmt.

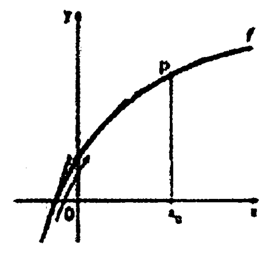


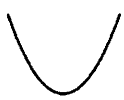
Wieso kann dieser Schluss gezogen werden?
Die 2. Ableitung gibt Auskunft über die Krümmung.

Wenn du die Tangenten entlang des Graphen legst (von links nach rechts), erkennst du, dass die Steigungen der Tangenten immer größer werden, man sagt, der Graph hat einen progressiven Verlauf, der Graph ist linksgekrümmt.



Wenn Du die Tangenten entlang des Graphen legst (von links nach rechts), erkennst Du, dass die Steigungen der Tangenten immer kleiner werden, man sagt, der Graph hat einen degressiven Verlauf, der Graph ist rechtsgekrümmt.



Liegt ein Minimum  vor, werden die Tangentensteigungen mit zunehmendem x größer, zuerst negativ, dann null und anschließen positiv, daher ist f'' an der Minimumstelle positiv und der Graph linksgekrümmt.

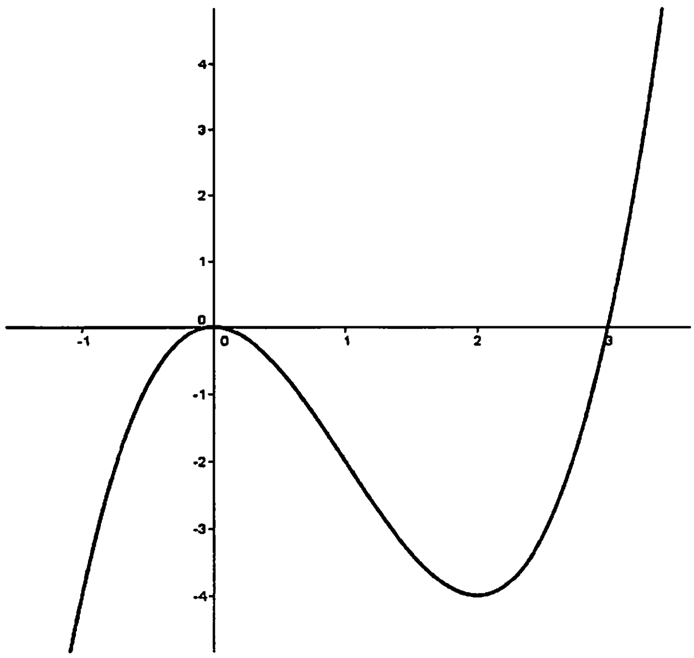
Liegt ein Maximum  vor, werden die Tangentensteigungen mit zunehmendem x kleiner, zuerst positiv, dann null und anschließen negativ, daher ist f'' an der Maximumstelle negativ und der Graph rechtsgekrümmt.

Krümmung

Am Graphen erkennt man, dass f in (-∞; 1) rechtsgekrümmt ist, f''<0.
Die Tangentensteigungen nehmen mit zunehmendem x ab, d.h. f' ist in diesem Intervall streng monoton fallend.

In (1; ∞) ist f linksgekrümmt, f' >0.
Die Tangentensteigungen nehmen mit zunehmendem x zu, d.h. f' ist in diesem Intervall streng monoton steigend.

An der Stelle x=1 ändert sich die Krümmung von einer Rechts- in eine Linkskrümmung.

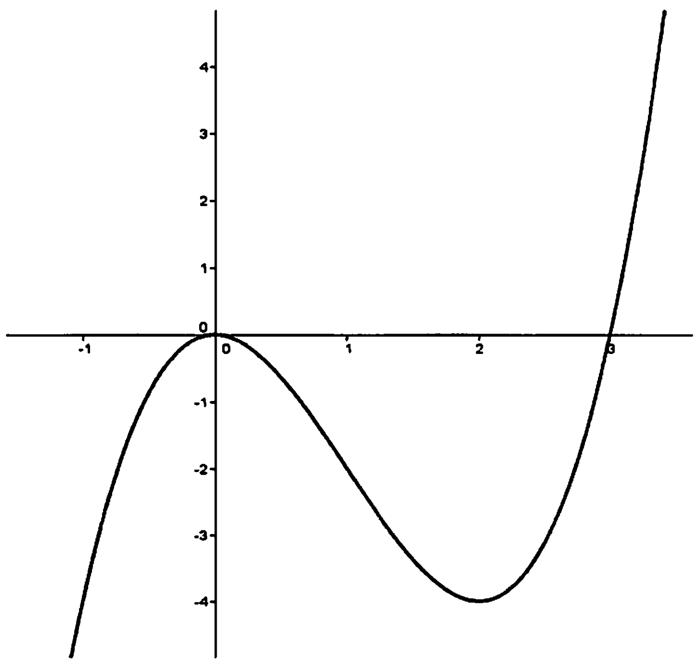


Wendestellen

An der Wendestelle ändert sich die Krümmung, also entweder Links- in Rechtskrümmung oder Rechts- in Linkskrümmung.
Um die Wendestelle zu berechnen, muss f'' gleich null gesetzt werden.

Die Wendestelle wird bei $x = 1$ vermutet, d.h. f''(1)=0

Vorsicht: Damit wirklich eine Wendestelle vorliegt muss die dritte Ableitung an der Wendestelle ungleich Null sein. Also $f'''(x) \neq 0$.
Hier: f'''(1) ≠ 0.



Bsp.: Die Funktionsgleichung des nebenstehenden Graphen lautet $g(x) = x^4$.

Man erkennt sofort, dass der Graph keinen Wendepunkt besitzt, also auch keine Wendestelle hat.

VORSICHT: $g'(x) = 4x^3$

$g''(x) = 12x^2 \quad 12x^2 = 0$

Vermutung: Wendestelle bei $x = 0$

$g'''(x) = 24x$

Kontrolle: $g'''(0) = 0$, d.h. bei x=0 liegt keine Wendestelle vor.