FA 5 Exponentialfunktion $f(x) = a \cdot b^x$ bzw. $f(x) = a \cdot e^{\lambda x}$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+, \lambda \in \mathbb{R}$

1a. Eigenschaften von $f(x) = b^x$

Alle Funktionswerte sind positiv.

Alle Graphen gehen durch den Punkt (0|1).

Ist b>1, dann ist f streng monoton steigend.

Ist 0<b<1, dann ist f streng monoton fallend.

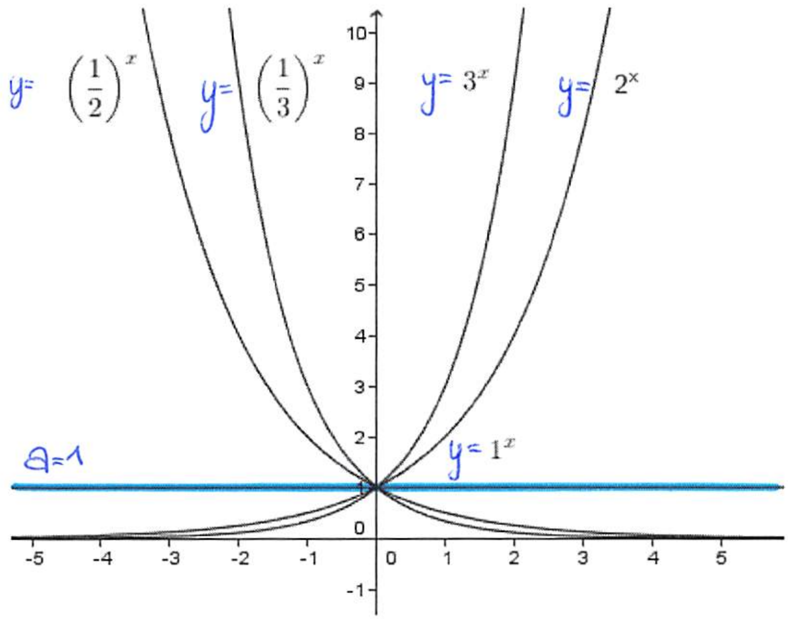
Ist b=1, dann ist f konstant.

Die Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = b^x$ und $g(x) = \left(\frac{1}{b}\right)^x$ sind symmetrisch bezüglich der y-Achse.

weil $f(0) = b^0 = 1$

$S_y(0|1)$

Schnittpunkt bei y-Achse



1b. Eigenschaften von $f(x) = a \cdot b^x$

Alle Funktionswerte sind positiv.

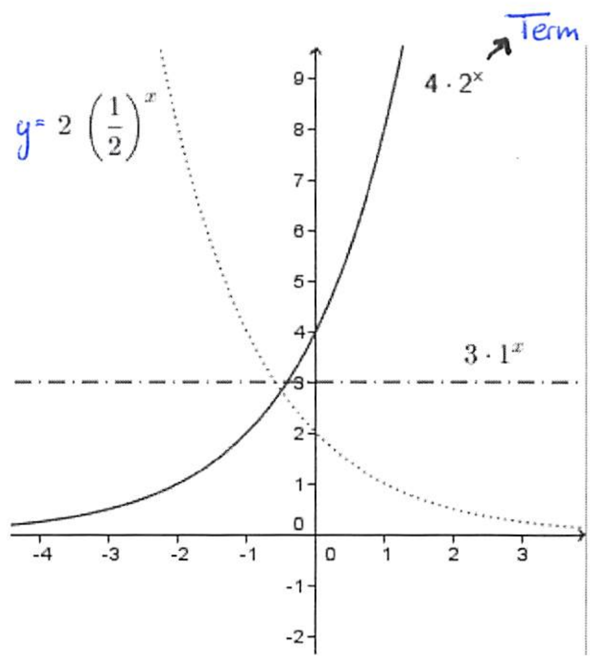
Alle Graphen gehen durch den Punkt $(0|a)$.

Gleichung

Die Graphen der Funktionen f und g mit

Die Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = a \cdot b^x$ und $g(x) = a \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^x$ sind symmetrisch bezüglich der y-Achse.

a-Wert = Schnittpunkt mit y-Achse



Ist b>1 dann steigt f umso schneller je größer b ist. ($y = 3^x$ wächst schneller als $y = 2^x$) Ist 0<b<1 dann fällt f umso schneller je kleiner b ist. ($y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ fällt schneller als $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$)

alles umformen können

2. Interpretation der Werte a und b wenn $f(x) = a \cdot b^x$

$f(0)=a$, a ist also der y-Achsenabschnitt

$b^2 = \frac{f(x+2)}{f(x)}$

① $f(x+1)=f(x) \cdot b$ ② $f(x+2)=f(x) \cdot b^2$ → allgemein: $f(x+h)=f(x) \cdot b^h$

→ ① Vergrößert man das Argument um 1, dann ändert sich der Funktionswert auf das b-fache.

→ ② Vergrößert man das Argument um 2, dann ändert sich der Funktionswert auf das b^2-fache.

→ Vergrößert man das Argument um h, dann ändert sich der Funktionswert auf das b^h-fache.

3. Die natürliche Exponentialfunktion $f(x) = a \cdot e^{\lambda \cdot x}, \lambda \in \mathbb{R}$.

In den Naturwissenschaften kommt der Euler`schen Zahl eine besondere Bedeutung zu. Daher verwendet man neben der Darstellung $f(x) = a \cdot b^x$ auch die Darstellung $f(x) = a \cdot e^{\lambda \cdot x}, \lambda \in \mathbb{R}$.

das Gleiche

↳ statt λ steht oft k

z.B. Bakterienwachstum

wichtig! → $a \cdot b^x = a \cdot e^{\lambda \cdot x}$ ← wichtig!

Daher:

$\cancel{a} \cdot b^x = \cancel{a} \cdot e^{\lambda x}$

$b^x = e^{\lambda x}$

$b = e^{\lambda}$

$b = e^{\lambda}$ → e = natürliche Vorgänge + Kapitalentwicklung

$\ln b = \ln e^{\lambda}$

$\ln b = \lambda \cdot \ln e$

$\ln b = \lambda$

→ Zwei Unbekannte, e = fixe Zahl

4. Wachstums- und Abnahmeprozesse modellieren

Viele Prozesse, wie Bakterienwachstum, Luftdruckänderung, Kapitalentwicklung, radioaktiver Zerfall ändern sich exponentiell.

Man nennt sie exponentielle Wachstums- oder Abnahmeprozesse.

Dazu verwendet man eine spezielle Schreibweise:

$\boxed{N(t) = N_0 \cdot b^t}$ oder $\boxed{N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda t}}$

	$N(t) = N_0 \cdot b^t$	$N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda t}$
Exponentielles Wachstum	$b > 1$	$\lambda > 0$
Exponentielle Abnahme	$0 < b < 1$	$\lambda < 0$

5. Halbwertszeit und Verdoppelungszeit mit $N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda t}$

Wenn ein exponentieller Prozess vorliegt, versteht man unter der Halbwertszeit jene Zeit nach der sich N(t) halbiert, also $N(t) = \frac{N_0}{2}$.

Unter der Verdoppeltungszeit versteht man jene Zeit nach der sich N(t) verdoppelt, also $N(t) = 2\,N_0$

Halbwertszeit berechnen:

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$

$\ln a^2 = 2 \ln a$

! $\ln(a+b)$ ↯ nicht $\ln(ab)$

! $\ln(a-b)$ ↯ nicht $\ln\left(\frac{a}{b}\right)$

$$
\begin{aligned}
\frac{\overset{1}{\cancel{N_0}}}{2} &= \cancel{N_0} \cdot e^{\lambda t} \\
\frac{1}{2} &= 1 \cdot e^{\lambda t} \\
\ln \frac{1}{2} &= \ln e^{\lambda t} \\
\ln \frac{1}{2} &= \lambda t \,\ln e \\
\frac{\ln 0{,}5}{\lambda} &= t \\
t &= \frac{\overset{0}{\cancel{\ln 1}} - \ln 2}{\lambda} \\
t &= \frac{-\ln 2}{\lambda}
\end{aligned}
$$

$t = \frac{\ln 0{,}5}{\lambda}$

$t = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\lambda}$

$t = \frac{\overset{0}{\cancel{\ln 1}} - \ln 2}{\lambda}$

$t = \frac{-\ln 2}{\lambda}$

Verdoppelungszeit berechnen:

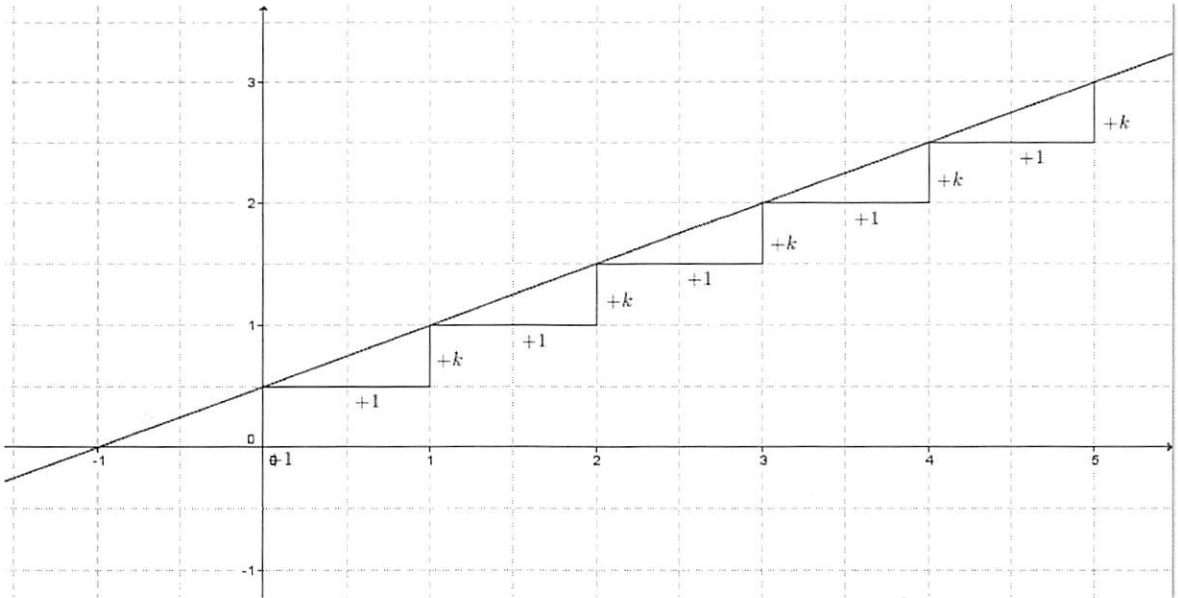
$$
\begin{aligned}
2 \cdot N_0 &= N_0 \cdot e^{\lambda t} \\
2 &= e^{\lambda t} \\
\ln 2 &= \ln e^{\lambda t} \\
\ln 2 &= \lambda t \,\ln e \\
\frac{\ln 2}{\lambda} &= t \\
t &= \frac{\ln 2}{\lambda}
\end{aligned}
$$

6. Lineares und exponentielles Modell vergleichen

Frage: Welches Modell beschreibt einen Vorgang angemessener?

→ Zuwachs bleibt pro Einheit gleich
absolute

Lineares Modell:



Erhöht man das Argument um eine Einheit, dann vergrößert sich (plus) oder vermindert sich (minus) der Funktionswert um k. → in diesem Fall k immer positiv

Allg.: $f(x+1)=f(x)\pm k$

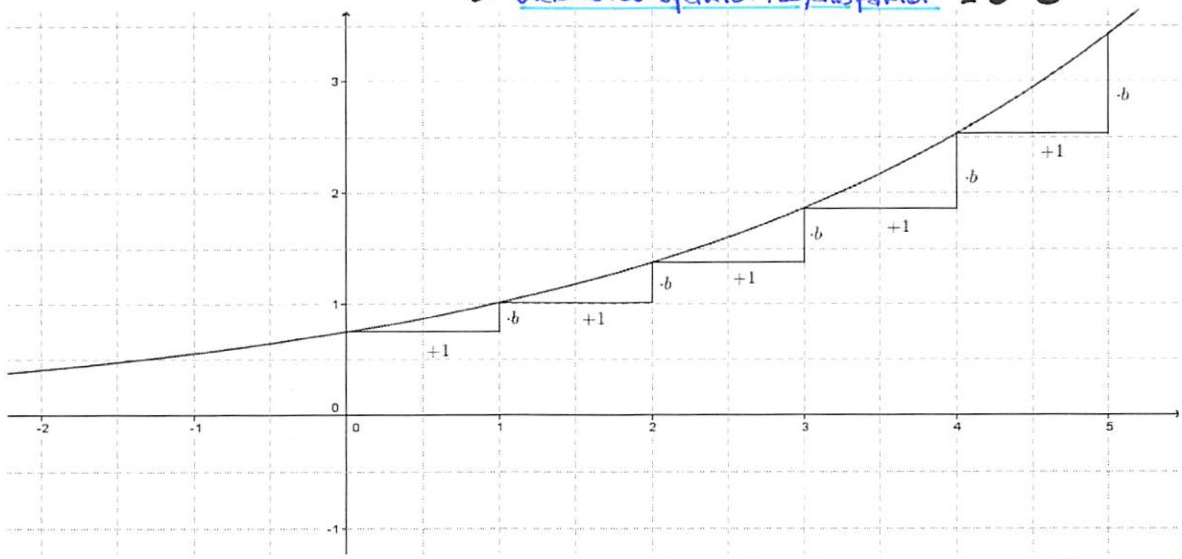
Erhöht man das Argument um h Einheiten dann vergrößert sich (plus) oder vermindert sich (minus) der Funktionswert um k+k+ ... +k (h mal) also $h\cdot k$

Allg.: $f(x+h)=f(x)\pm h\cdot k$

Die mittlere Änderung=Differenzenquotient $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ist stets konstant und entspricht der Steigung k.

Exponentielles Modell: $f(x) = a \cdot b^x$ $n(t) = n_0 \cdot a^t$ $n(t) = n_0 \cdot e^{\lambda t}$

→ Wachstumsfaktor / Zerfallsfaktor $= b = e^{\lambda}$



Erhöht man das Argument um eine Einheit, dann vergrößert sich (mal) oder vermindert sich (dividiert) der Funktionswert um den Faktor b bzw. $\frac{1}{b}$.

+ prozentueller Zuwachs ist pro Einheit gleich.

Allg.: $f(x+1) = f(x) \cdot b$ oder $f(x+1) = f(x) \cdot \frac{1}{b}$

Erhöht man das Argument um h (h>0) Einheiten dann vergrößert sich (mal) oder vermindert sich (dividiert) der Funktionswert um $b \cdot b \ldots \cdot b$ (h mal) also b^h

Allg.: $f(x+h) = f(x) \cdot b^h$ oder $f(x+h) = f(x) \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^h$

Der Quotient $\frac{f(x+h)}{f(x)}$ ist stets konstant.