AN 1 Änderungsmaße

1a. Änderungsmaße in einem Intervall

Sei f eine reelle Funktion, die auf dem Intervall[a;b] definiert ist. Dann bezeichnet man

$f(b)-f(a)$	als absolute Änderung von f in [a; b].
$\frac{f(b)-f(a)}{f(a)}$	als relative Änderung von f in [a; b].
$\frac{f(b)-f(a)}{f(a)} \cdot 100$	als prozentuelle Änderung (relative Änderung mal 100) von f in [a; b].
$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$	als mittlere Änderung von f in [a; b] = Differenzenquotient = Sekantensteigung k_{sek} Der Differenzenquotient einer linearen Funktion ist die Steigung der linearen Funktion. Sei s eine Zeit-Ort Funktion, dann entspricht der Differenzenquotient im Zeitintervall $[t_1; t_2]$: $\bar{v}\ (t_1; t_2) = \frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$ der mittleren Geschwindigkeit (Quotient aus Wegänderung und der dafür benötigten Zeit).

1b. Änderungsmaß an einer Stelle

Sei f eine reelle Funktion, dann heißt

$\lim_{z\to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} = f'(x)$ momentane (lokale) Änderungsrate von f an der Stelle x

= Differentialquotient= lim+Differenzenquotient=

= Differenzenquotient in einer sehr kleinen Umgebung von x=

= Tangentensteigung k_{tan}= f'(x)= 1. Ableitung an d. Stelle x

Der Differentialquotient einer linearen Funktion ist die Steigung der linearen Funktion.

Sei s eine Zeit-Ort-Funktion, dann heißt $v(t)=s'(t)= \lim_{z\to t} \frac{s(z)-s(t)}{z-t}$ momentane Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t.

2. Verschiedene Schreibweisen

$z-x=\Delta x$ $f(z)-f(x)=\Delta y=\Delta f$

2a. Differenzenquotient

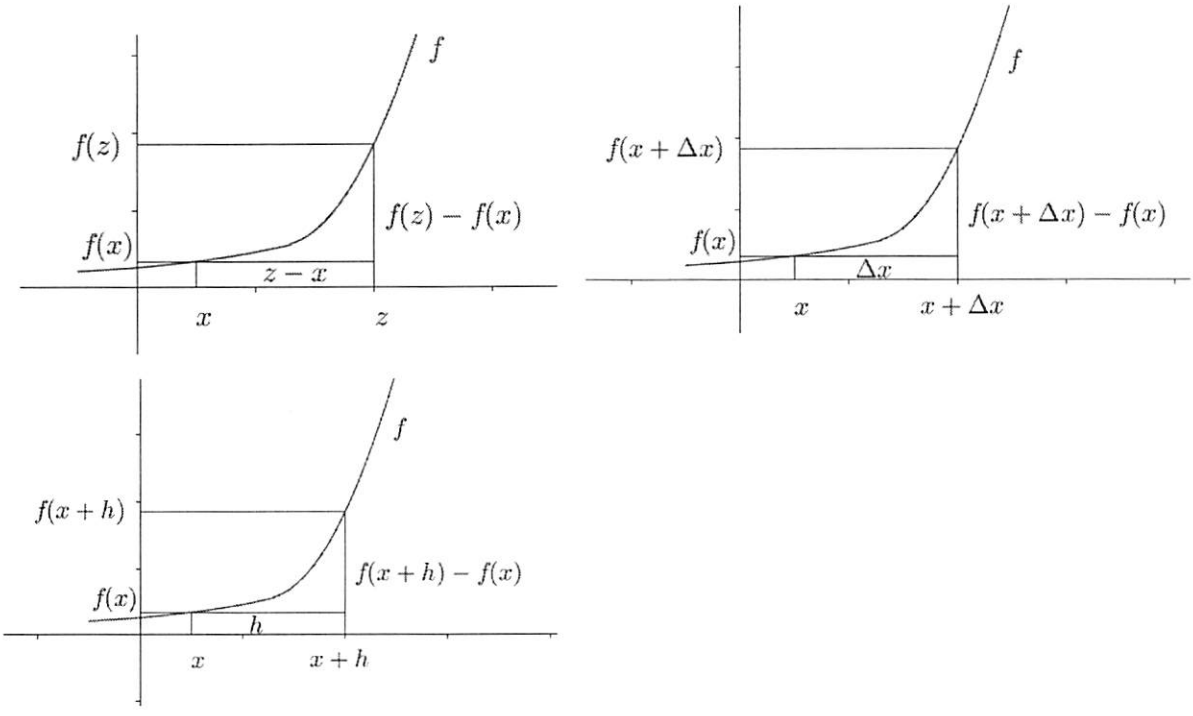
$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

2b. Differentialquotient

$$f'(x)=\lim_{z\to x}\frac{f(z)-f(x)}{z-x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{df}{dx}=\frac{dy}{dx}$$

Nähert sich beim Differentialquotient z unbegrenzt der Zahl x, so werden Δx und Δy immer kleiner. So erhält man „unendlich kleine Größen", die Differentiale genannt werden und mit dx bzw. dy bezeichnet werden. Der Zahl, der sich der Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ dabei unbegrenzt nähert, wird mit $\frac{dy}{dx}$ bezeichnet („dy nach dx") und wird ebenfalls Differentialquotient genannt.

Graphische Darstellung:



3. Typische Anwendungen momentane Änderungsrate bzw. mittlere Änderungsrate

Bei positivem Vorzeichen spricht man von (mittleren) Zunahmeraten, bei negativem Vorzeichen von (mittleren) Abnahmeraten.

Geschwindigkeiten
- bezogen auf eine Ort-Zeit-Funktion (s.o.).
- Mittlere bzw. lokale Änderungsgeschwindigkeiten werden bei zeitabhängigen Größen verwendet, z.B. Wachstum einer Pflanze, Bakterienwachstum.

Beschleunigung
- mittlere Beschleunigung: Sei s eine Zeit-Geschwindigkeitsfunktion, dann entspricht der Differenzenquotient im Zeitintervall $[t_1; t_2]$: $\bar{a}\ (t_1; t_2) = \frac{v(t_2)-v(t_1)}{t_2-t_1}$ der mittleren Beschleunigung (Quotient aus Geschwindigkeitsänderung und der dafür benötigten Zeit).
- Momentane Beschleunigung: Sei s eine Zeit-Geschwindigkeitsfunktion, dann heißt $a(t)=v'(t)=s''(t)=\lim_{z\to t}\frac{v(z)-v(t)}{z-t}$ momentane Beschleunigung zum Zeitpunkt t.

- Anwendungen aus der Wirtschaft, z.B. Grenzkosten.

- Anwendungen aus den Naturwissenschaften, z. B. Luftdruckänderung.

4. Differentialquotient aus Funktionsgleichungen berechnen

Beispiele:

4a. Berechne die Ableitungsfunktion von f mit $f(x)=x^2$.

$$\lim_{z\to x}\frac{f(z)-f(x)}{z-x}=\lim_{z\to x}\frac{z^2-x^2}{z-x}=\lim_{z\to x}\frac{(z-x)(z+x)}{z-x}=\lim_{z\to x} z+x=x+x=2x$$

4b. Berechne die Ableitungsfunktion von f mit $f(x)=x^2-2x$.

$$\lim_{z\to x}\frac{f(z)-f(x)}{z-x}=\lim_{z\to x}\frac{z^2-2z-(x^2-2x)}{z-x}=\lim_{z\to x}\frac{z^2-2z-x^2+2x}{z-x}=\lim_{z\to x}\frac{(z^2-x^2)-2z+2x}{z-x}=\lim_{z\to x}\frac{(z-x)(z+x)-2z+2x}{z-x}=$$
$$\lim_{z\to x}\frac{(z-x)(z+x)-2(z-x)}{z-x}=\lim_{z\to x}\frac{(z-x)[(z+x)-2]}{z-x}=\lim_{z\to x} z+x-2=x+x-2=2x-2$$

5. Differenzengleichungen

5a. Lineares Wachsen und Abnehmen

P(n) sei eine Größe einer linear wachsenden Population zum Zeitpunkt n in Jahren.
Zu Beginn sei die Größe der Population gleich d. Pro Jahr wächst sie um k.

Also:
$P(0)=d$ $P(n+1)=P(n)+k$
dies nennt man rekursive Darstellung eines linearen Wachstums.

Allgemein für beliebig gleich große Zeitabschnitte Δt:
$P(t+\Delta t)=P(t)+k\cdot\Delta t$ $P(t+\Delta t)-P(t)=k\cdot\Delta t$
$\Delta P=k\cdot\Delta t$ mit $\Delta P=P(t+\Delta t)-P(t)$

Beispiel zu 5a:
a. Ermittle P(n) für n=0, 1, 2, 3 mit d=1,5 und k=0,5

b. Es gelte $P(0)=d$ und $P(t+\Delta t)=P(t)+k\cdot\Delta t$. Ermittle $P(n\cdot\Delta t)$ für n=0, 1, 2, 3 mit d=1000, k=400 und $\Delta t=2$

5b. Exponentielles Wachsen und Abnehmen

P(n) sei eine Größe einer exponentiell wachsenden Population zum Zeitpunkt n in Jahren.
Zu Beginn sei die Größe der Population gleich c. Pro Jahr wächst sie mit dem Faktor a>1.

Also: $P(0)=c$ $P(n+1)=P(n)\cdot a$
dies nennt man rekursive Darstellung eines exponentiellen Wachstums.

Allgemein gilt für beliebig gleich große Zeitabschnitte Δt:
$P(0)=c$ $P(t+\Delta t)=P(t)\cdot a^{\Delta t}$

Beispiel zu 5b:
a. Es gelte $P(0)=c$ und $P(n+1)= P(n)\cdot a$. Ermittle $P(n\cdot)$ für n=0, 1, 2, 3 mit c=100 und a=1,1

b. Es gelte $P(0)=c$ und $P(t+\Delta t)= P(t)\cdot a^{\Delta t}$. Ermittle $P(n\cdot\Delta t)$ für n=0, 1, 2, 3 mit c=50, a=1,2 und Δt=5.

AN 2 Regeln für das Differenzieren

Ableitungsregel für konstante Funktionen

$f(x)=c$ $f'(x)=0$ $(c\in \mathbb{R})$

Bsp.:
$f(x)=5$ $f'(x)=0$

Regel vom konstanten Faktor

$f(x)=c \cdot g(x)$ $f'(x)=c \cdot g'(x)$ $(c\in \mathbb{R})$

Bsp.:
$f(x)=2 \cdot x^2$ $f'(x)=2 \cdot 2x$

Potenzregel

$f(x)=x^n$ $f'(x)=n \cdot x^{n-1}$

Bsp.:
$f(x)= x^2$ $f'(x)=2x$

Summen bzw. Differenzenregel

$f(x)= g(x) + h(x)$ $f'(x)= g'(x) + h'(x)$
$f(x)= g(x) - h(x)$ $f'(x)= g'(x) - h'(x)$

Bsp.:
$f(x)=4x^3 - 2x^2 +3x$ $f'(x)=12x^2 -4x+3$

Produktregel

$f(x)= g(x) \cdot h(x)$ $f'(x)= g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$

Bsp.:
$f(x)=2x(2-x)$ $f'(x)=2\,(2-x) + 2x\,(-1) = 4 - 4x$

→ ausmultiplizieren auch möglich

Quotientenregel → NAZ-ZAN

↳ Nenner-Ableitung · Zähler − Zähler-Ableitung · Nenner

$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ $f'(x)=\frac{h(x)\cdot g'(x)-g(x)\cdot h'(x)}{h^2(x)}$

Bsp.:

$f(x)=\frac{3x+2}{2x-1}$ $f'(x)=\frac{(2x-1)\cdot 3-(3x+2)\cdot 2}{(2x-1)^2}=\frac{-7}{(2x-1)^2}$

Ableitungen Sinus und Cosinus

$f(x)=\sin(x)$ $f'(x)=\cos(x)$

$f(x)=\cos(x)$ $f'(x)=-\sin(x)$

Ableitung Exponentialfunktion

$f(x)=e^x$ $f'(x)=e^x$

Ableitungsregeln für f(kx)

$g(x)=f(kx)$ $g'(x)=k\cdot f'(kx)$

Bsp.:

$f(x)=\sin(2x)$ $f'(x)=2\cdot\cos(2x)$

$f(x)=e^{2x}$ $f'(x)=2\cdot e^{2x}$

Ableitung der Quadratwurzel

$f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ $f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Kettenregel

$f(x)=u(v(x))$ $f'(x)=u'(v(x))\cdot v'(x)$

$u'(v(x))\cdot$ ... äußere Ableitung

$v'(x)$ ... innere Ableitung

Merke: Kettenregel = äußere Ableitung mal innere Ableitung

Bsp.:

$f(x)=\sqrt{x^2-2x}=(x^2-2x)^{\frac{1}{2}}$ $f'(x)=\frac{1}{2}(x^2-2x)^{-\frac{1}{2}}(2x-2)=\frac{2x-2}{2\sqrt{(x^2-2x)}}=\frac{2(x-1)}{2\sqrt{\ldots}}$

Ableitung einer Logarithmusfunktion

$f(x)=\ln x$ $f'(x)=\frac{1}{x}$

Bsp.:

$f(x)= 3 \cdot \ln(x^2)$ $f'(x)=3 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{6}{x}$

Anwendung von mehreren Regeln

Bsp.:

$f(x)=e^{x^2}4x^2$ $f'(x)=e^{x^2}8x + e^{x^2}2x4x^2 = 8xe^{x^2} + 8x^3e^{x^2}$

Nach verschiedenen unabhängigen Variablen ableiten

Bsp.:

$s(a)=xa^2-wa^3$ $s'(a)=2xa-3wa^2$

$f(x) = e^{x^2} 4x^2$

$f'(x) = e^{x^2} 8x + e^{x^2} 2x \cdot 4x^2 =$

$= 8xe^{x^2} \cdot 1 + 8x^3 e^{x^2} =$