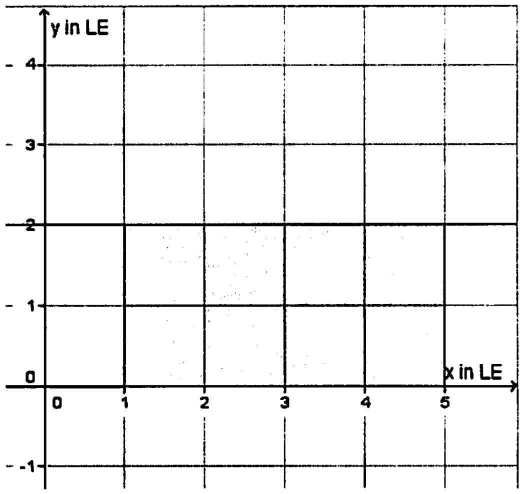
AN 4 Summation und Integral

Vorwissen:

a) Berechne den Inhalt der Fläche mit Deinem bisherigen Wissen.

$A = 4 \cdot 2 = 8\ FE$

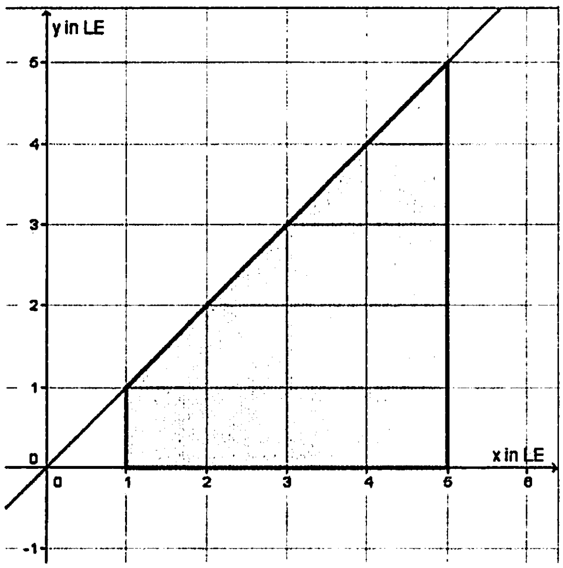


b) Berechne den Inhalt der Fläche mit Deinem bisherigen Wissen.

$A_{Trapez} = \frac{1+5}{2} \cdot 4 = 12\ FE$

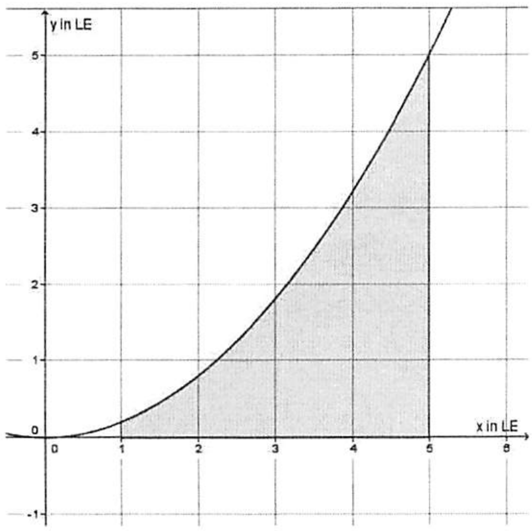
ODER

$A_{Rechteck} + A_{rechtwinkliges\ Dreieck} = 4 + 8$
$= 12\ FE$



1. Flächeninhalt zwischen einer Funktion f und x-Achse zwischen zwei Grenzen mit dem bestimmten Integral berechnen

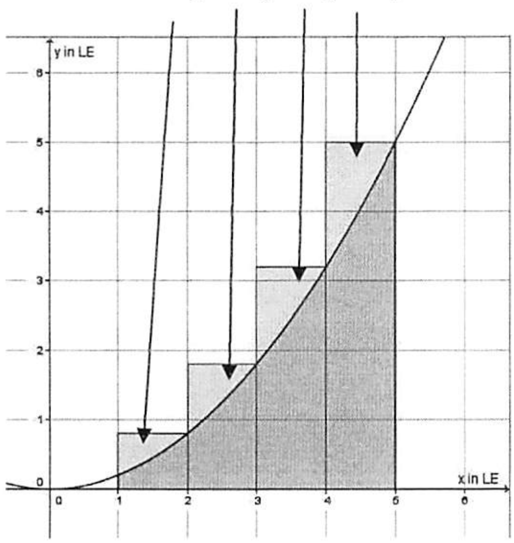
Mit Deinem bisherigen Wissen ist das noch nicht möglich.



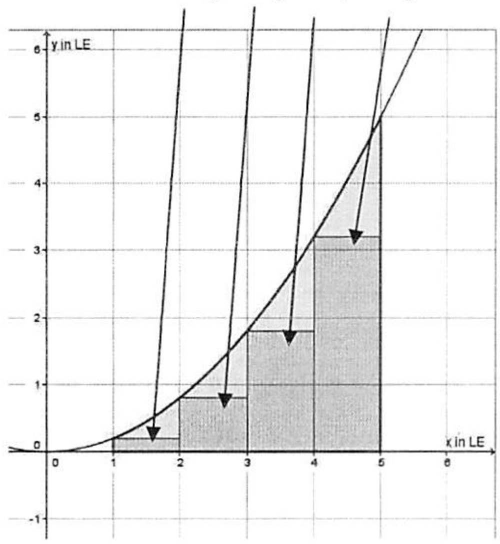
Zerlegung in Rechtecke (Streifen)

n = 4

Obersumme= $A_1 + A_2 + A_3 + A_4$



Untersumme= $A_5 + A_6 + A_7 + A_8$



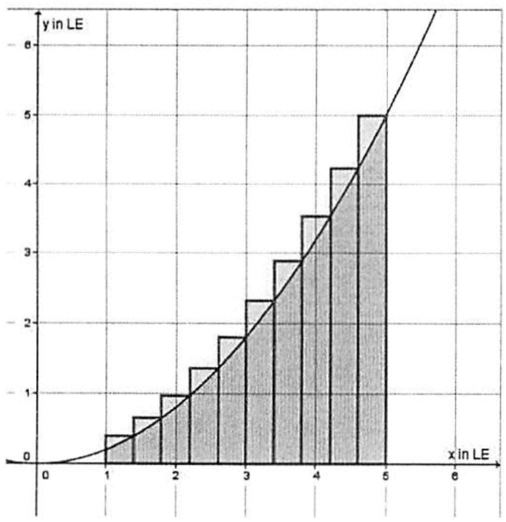
Breite der Rechtecke $\Delta x = 1$

$A_1 = 1 \cdot f(2)$
$A_2 = 1 \cdot f(3)$
$A_3 = 1 \cdot f(4)$
$A_4 = 1 \cdot f(5)$

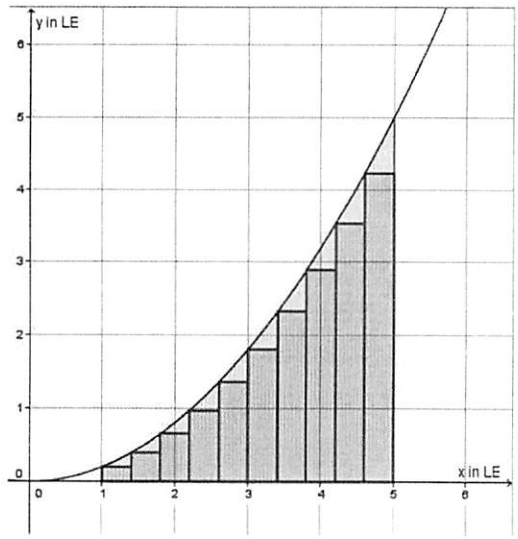
$A_5 = 1 \cdot f(1)$
$A_6 = 1 \cdot f(2)$
$A_7 = 1 \cdot f(3)$
$A_8 = 1 \cdot f(4)$

$n = 10$

Obersumme



Untersumme



Breite der Rechtecke $\Delta x = 0{,}4$

Der gesuchte Flächeninhalt liegt zwischen der Ober – und Untersumme.
Vergrößert man die Anzahl der Rechtecke/Streifen nähert sich die Unter- und Obersumme dem exakten Flächeninhalt immer mehr an.
Wenn $n \to \infty$ wird die Streifenbreite Δx immer kleiner.

Die Obersumme O_n wird mit $n \to \infty$ immer kleiner und nähert sich dem exakten Flächeninhalt von oben an.
Die Untersumme U_n wird mit $n \to \infty$ immer größer und nähert sich dem exakten Flächeninhalt von unten an.

$lim_{n \to \infty} U_n$ = exakter A zwischen zwei Grenzen a & b zwischen Funktion und x-Achse= $\lim\limits_{n \to \infty} O_n$

kurz: $$lim_{n \to \infty} U_n = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} O_n$$

Begriffe	
f(x) ... Integrand	x ... Integrationsvariable
a ... untere Integrationsgrenze	b ... obere Integrationsgrenze

Bestimmtes Integral $\int_a^b$ ist vorstellbar als Summe (Integralzeichen steht für S=Summe) von Produkten $f(x) \cdot \Delta x = f(x) \cdot \mathrm{d}x$ (Δx wird durch dx ersetzt, da die Rechtecksbreiten unendlich klein werden) zwischen zwei Grenzen a und b.

Bestimmtes Integral berechnen

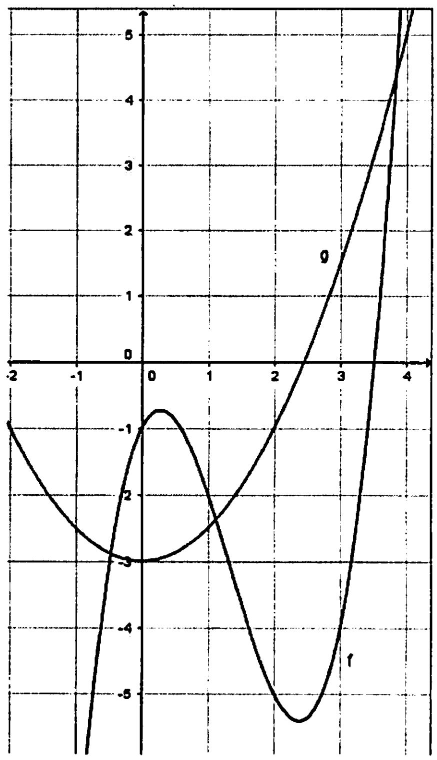
$$\int_1^3 f(x)\,dx = [F(x) + C]_1^3 = (F(3) + C) - (F(1) + C) = F(3) + C - F(1) - C = F(3) - F(1)$$

Bsp.: Berechne $\int_1^3 2x\,dx$.

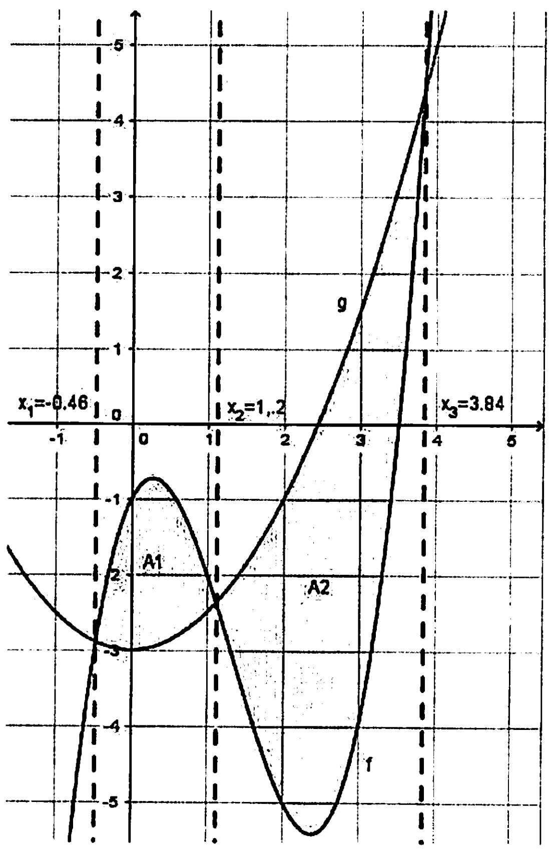
$\int_1^3 2x\,dx = [\frac{2x^2}{2}]_1^3 = \frac{2\cdot 3^2}{2} - \frac{2\cdot 1^2}{2}$ =8 FE

4. Fläche zwischen zwei Funktionen f und g.

$f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x - 1$ $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$



Schnittstellen berechnen (durch Gleichsetzen der beiden Funktionen) $x_1 = -0{,}46, x_2 = 1{,}12, x_3 = 3{,}84$



$$A_1 = \int_{-0{,}46}^{1{,}12} f(x) - g(x) = \left|\int_{-0{,}46}^{1{,}12} g(x) - f(x)\right|$$

$$A_2 = \int_{1{,}12}^{3{,}84} g(x) - f(x) = \left|\int_{1{,}12}^{3{,}84} f(x) - g(x)\right|$$

$$A \ = A_1 + A_2$$

Hinweis: Berechnet man mit dem bestimmten Integral einen Flächeninhalt, ist das Ergebnis immer >0 (dies entspricht einer Anwendung der Integralrechnung)

5. Weitere Anwendungen der Integralrechnung

- Flächeninhalte
- Weglängen/Geschwindigkeit/Beschleunigung
- Volumina
- Arbeit
- Leistung
- Integrale von Änderungsraten (1. Ableitung steht hinter dem Integralzeichen)

6. Integrationsregeln (inkl. Wdh. der Ableitung)

Stammfunktionen von Potenzfunktionen $f(x)=x^r$, $r \in \mathbb{R}$, $r \neq -1$

Stammfunktion	Funktion	Ableitungsfunktion
$F(x) = \int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

Anwendung der Faktorregel: $f(x) = c \cdot x^n, c \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{R}; n \neq -1$

Stammfunktion	Funktion	Ableitungsfunktion
$F(x) = \int c \cdot x^n \cdot dx = c \cdot \int x^n \cdot dx = c \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$f(x) = c \cdot x^n$	$f'(x) = c \cdot n \cdot x^{n-1}$

Stammfunktion von konstanten Funktionen $f(x) = k,\ k \in \mathbb{R}$

Stammfunktion	Funktion	Ableitungsfunktion
$F(x) = \int k \, dx = kx + C$	$f(x) = k$	$f'(x) = 0$

Stammfunktion von Sinus- und Cosinusfunktion

Stammfunktion	Funktion	Ableitungsfunktion
$F(x) = \int \cos(x) \, dx = \sin(x) + C$	$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$
$F(x) = \int \sin(x) \, dx = -\cos(x) + C$	$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$

Stammfunktion von Polynomfunktionen

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

Stammfunktion	Funktion	Ableitungsfunktion
$\int 3x^5 + 4x^2 - 3x + 1\,dx =$ $= \int 3x^5\,dx + \int 4x^2\,dx - \int 3x\,dx + \int 1\,dx =$ $= \frac{3x^6}{6} + \frac{4x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + x + C$	$f(x) = 3x^5 + 4x^2 - 3x + 1$	$f'(x) = 15x^4 + 8x - 3$

Weitere Stammfunktionen bzw. Regeln

Stammfunktion	Funktion	Ableitungsfunktion
$F(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$F(x) = \int e^x dx = e^x + C$	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$\frac{1}{k} F(k \cdot x)$	Integranden der Form $f(k \cdot x)$	$k \cdot f'(k \cdot x)$
$F + G$	$f + g$	$f' + g'$
$k \cdot F$	$k \cdot f$	$k \cdot f'$

Regeln für das bestimmte Integral

$\int_a^b c \cdot f = c \cdot \int_a^b f$
$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$
$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$