Erklärung des bestimmten Integrals

Aufgabennummer: 1_166	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Lückentext	Grundkompetenz: AN 4.1

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Der Begriff des bestimmten Integrals soll erklärt werden.

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Textbausteine so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

Ein bestimmtes Integral kann als ____①____ einer/eines ____②____ gedeutet werden.

①	
Summe	☐
Produkt	☐
Grenzwert	☐

②	
Grenzwertes von Summen	☐
Summe von Produkten	☐
Produktes von Grenzwerten	☐

Lösungsweg

①	
Grenzwert	☒

②	
Summe von Produkten	☒

Lösungsschlüssel

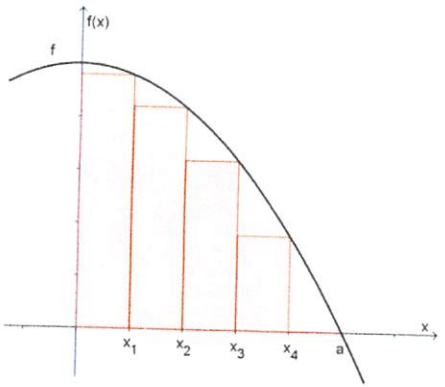
Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn für beide Lücken ausschließlich der jeweils richtige Satzteil angekreuzt ist.

Untersumme

Aufgabennummer: 1_172	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 4.1

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Der Graph der in der nachstehenden Abbildung dargestellten Funktion f schließt mit der x-Achse im 1. Quadranten ein Flächenstück ein.



Der Inhalt A dieses Flächenstücks kann mit dem Ausdruck

$$f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x + f(x_3) \cdot \Delta x + f(x_4) \cdot \Delta x$$

näherungsweise berechnet werden.

Aufgabenstellung:

Geben Sie die geometrische Bedeutung der Variablen Δx an und beschreiben Sie den Einfluss der Anzahl der Teilintervalle $[x_i; x_{i+1}]$ von $[0; a]$ auf die Genauigkeit des Näherungswertes für den Flächeninhalt A!

Möglicher Lösungsweg

Δx ist die Breite (bzw. „Länge") der dargestellten Rechtecke. Je größer die Anzahl der Teilintervalle von $[0; a]$ ist, desto genauer ist der Näherungswert.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine richtige Deutung von Δx und eine sinngemäß richtige Beschreibung des Einflusses der Anzahl der Teilintervalle.

Unbestimmtes Integral

Aufgabennummer: 1_038	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (1 aus 6)	Grundkompetenz: AN 4.2

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben sind Aussagen über die Lösung eines unbestimmten Integrals. Nur eine Rechnung ist richtig. Die Integrationskonstante wird in allen Fällen mit $c = 0$ angenommen.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die korrekte Rechnung an!

$\int 3 \cdot (2x + 5)\mathrm{d}x = (6x + 5)^2$	☐
$\int 3 \cdot (2x + 5)\mathrm{d}x = 3x^2 + 5x$	☐
$\int 3 \cdot (2x + 5)\mathrm{d}x = (6x + 15)^2$	☐
$\int 3 \cdot (2x + 5)\mathrm{d}x = 3 \cdot (x^2 + 5x)$	☐
$\int 3 \cdot (2x + 5)\mathrm{d}x = 3x^2 + 15$	☐
$\int 3 \cdot (2x + 5)\mathrm{d}x = 6x^2 + 15x$	☐

Lösungsweg

$\int 3 \cdot (2x + 5)\mathrm{d}x = (6x + 5)^2$	
$\int 3 \cdot (2x + 5)\mathrm{d}x = 3x^2 + 5x$	
$\int 3 \cdot (2x + 5)\mathrm{d}x = (6x + 15)^2$	
$\int 3 \cdot (2x + 5)\mathrm{d}x = 3 \cdot (x^2 + 5x)$	☒
$\int 3 \cdot (2x + 5)\mathrm{d}x = 3x^2 + 15$	
$\int 3 \cdot (2x + 5)\mathrm{d}x = 6x^2 + 15x$	

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als gelöst, wenn ausschließlich die zutreffende Aussage angekreuzt ist.

Integral berechnen

Aufgabennummer: 1_167	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 4.2

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie $\int (ah^3 + a^2)\mathrm{d}h$!

Möglicher Lösungsweg

$\frac{ah^4}{4} + a^2h + C$ (mit $C \in \mathbb{R}$)

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die angegebene oder eine dazu äquivalente Lösung (samt Integrationskonstante).

Integrationsregeln

Aufgabennummer: 1_227	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 4.2

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Es sei f eine reelle Funktion und a eine reelle Zahl.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Gleichungen an!

$\int a \cdot f(x)\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx$	☐
$\int f(a \cdot x)\,dx = \int f(a)\,dx \cdot \int f(x)\,dx$	☐
$\int (a + f(x))\,dx = \int a \cdot dx + \int f(x)\,dx$	☐
$\int f(a + x)\,dx = \int f(a)\,dx + \int f(x)\,dx$	☐
$\int f(x)^2\,dx = \frac{f(x)^3}{3} + c$	☐

Lösung

$\int a \cdot f(x)\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx$	☒
$\int (a + f(x))\,dx = \int a \cdot dx + \int f(x)\,dx$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau zwei Gleichungen angekreuzt sind und beide Kreuze richtig gesetzt sind.

Bestimmte Integrale

Aufgabennummer: 1_060	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Zuordnungsformat	Grundkompetenz: AN 4.3

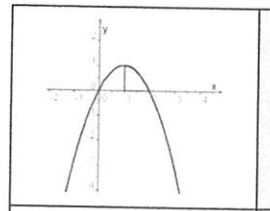
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

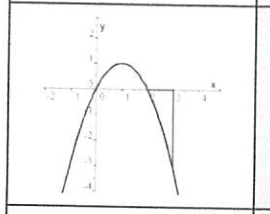
Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^2 + 2x$.

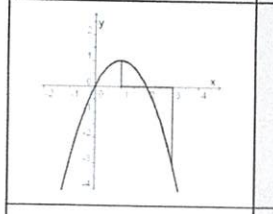
Die nachstehende Tabelle zeigt Graphen der Funktion mit unterschiedlich schraffierten Flächenstücken.

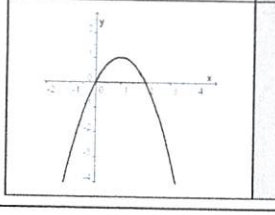
Aufgabenstellung:

Beurteilen Sie, ob die nachstehend angeführten Integrale den Flächeninhalt einer der markierten Flächen ergeben, und ordnen Sie entsprechend zu!



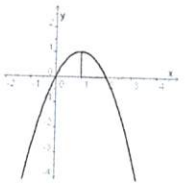
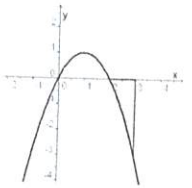
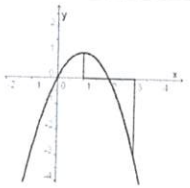
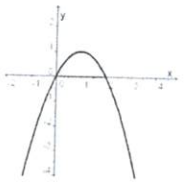






A	$2 \cdot \int_1^2 (-x^2 + 2x)\,dx$
B	$\int_1^3 (-x^2 + 2x)\,dx$
C	$\int_1^2 (-x^2 + 2x)\,dx + \left\lvert \int_2^3 (-x^2 + 2x)\,dx \right\rvert$
D	$\int_0^1 (-x^2 + 2x)\,dx - \int_1^2 (-x^2 + 2x)\,dx$
E	$\left\lvert \int_2^3 (-x^2 + 2x)\,dx \right\rvert$
F	$\int_1^2 (-x^2 + 2x)\,dx$

Lösungsweg

	F
	E
	C
	A

A	$2 \cdot \int_1^2 (-x^2 + 2x)\,dx$
B	$\int_1^3 (-x^2 + 2x)\,dx$
C	$\int_1^2 (-x^2 + 2x)\,dx + \left\lvert \int_2^3 (-x^2 + 2x)\,dx \right\rvert$
D	$\int_0^1 (-x^2 + 2x)\,dx - \int_1^2 (-x^2 + 2x)\,dx$
E	$\left\lvert \int_2^3 (-x^2 + 2x)\,dx \right\rvert$
F	$\int_1^2 (-x^2 + 2x)\,dx$

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe ist nur dann als richtig zu werten, wenn alle Buchstaben richtig zugeordnet sind.

Begrenzung einer Fläche

Aufgabennummer: 1_096	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 4.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Der Inhalt derjenigen Fläche, die vom Graphen der Funktion $f\colon x \to x^2$, der positiven x-Achse und der Geraden mit der Gleichung $x = a$ ($a \in \mathbb{R}$) eingeschlossen wird, beträgt 72 Flächeneinheiten.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie den Wert a!

Möglicher Lösungsweg

$72 = \int_0^a x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\Big|_0^a = \frac{a^3}{3} \Rightarrow a^3 = 216 \Rightarrow a = 6$

Lösungsschlüssel

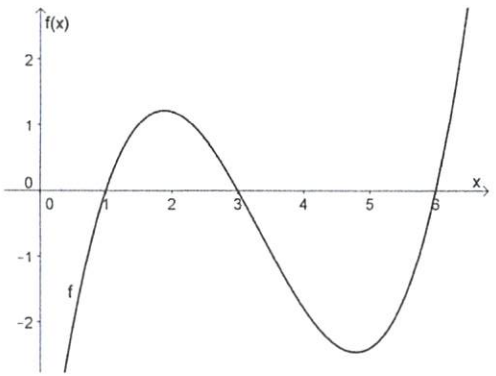
Ein Rechenweg muss erkennbar sein. Die Aufgabe ist als richtig zu werten, wenn der Ansatz $72 = \int_0^a x^2\,\mathrm{d}x$ korrekt ist und richtig integriert wurde.

Aussagen über bestimmte Integrale

Aufgabennummer: 1_113	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (x aus 5)	Grundkompetenz: AN 4.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Die stetige reelle Funktion f mit dem abgebildeten Graphen hat Nullstellen bei $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ und $x_3 = 6$.



Aufgabenstellung:

Welche der folgenden Aussagen ist/sind zutreffend?
Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an!

$\int_1^3 f(x)\,dx < 2$	☐
$\int_1^6 f(x)\,dx < 0$	☐
$\left\lvert \int_3^6 f(x)\,dx \right\rvert < 6$	☐
$\int_1^3 f(x)\,dx + \int_3^6 f(x)\,dx > 0$	☐
$\int_1^3 f(x)\,dx > 0$ und $\int_3^6 f(x)\,dx < 0$	☐

Lösungsweg

$\int_1^3 f(x)\,dx < 2$	☒
$\int_1^6 f(x)\,dx < 0$	☒
$\left\lvert \int_3^6 f(x)\,dx \right\rvert < 6$	☒
$\int_1^3 f(x)\,dx > 0$ und $\int_3^6 f(x)\,dx < 0$	☒

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn genau die vier zutreffenden Aussagen angekreuzt sind.

Stahlfeder

Aufgabennummer: 1_170	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 4.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Um eine Stahlfeder aus der Ruhelage $x_0 = 0$ um x cm zu dehnen, ist die Kraft $F(x)$ erforderlich.

Aufgabenstellung:

Geben Sie an, was in diesem Kontext mit dem Ausdruck $\int_0^8 F(x)\mathrm{d}x$ berechnet wird!

Möglicher Lösungsweg

die Arbeit, die verrichtet wird, wenn die Feder aus der Ruhelage um 8 cm gedehnt wird

Lösungsschlüssel

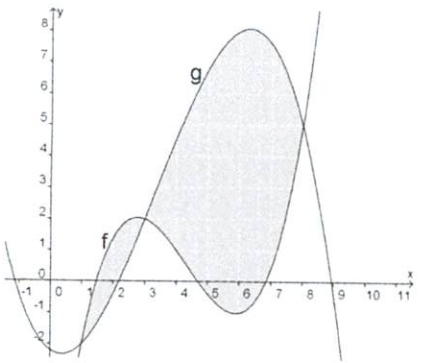
Ein Punkt für eine sinngemäß richtige Deutung, wobei der Begriff *Arbeit* und die Ausdehnung um 8 cm angeführt sein müssen.

Flächenberechnung

Aufgabennummer: 1_183	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (x aus 5)	Grundkompetenz: AN 4.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Die Summe A der Inhalte der beiden von den Graphen der Funktionen f und g eingeschlossenen Flächen soll berechnet werden.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die zutreffende(n) Formel(n) an!

$A = \int_1^8 \left(f(x) - g(x)\right) dx$	☐
$A = \int_1^3 \left(f(x) - g(x)\right) dx + \int_3^8 \left(g(x) - f(x)\right) dx$	☐
$A = \left\lvert \int_1^8 \left(f(x) - g(x)\right) dx \right\rvert$	☐
$A = \int_1^3 \left(f(x) - g(x)\right) dx - \int_3^8 \left(f(x) - g(x)\right) dx$	☐
$A = \left\lvert \int_1^3 \left(f(x) - g(x)\right) dx \right\rvert + \left\lvert \int_3^8 \left(f(x) - g(x)\right) dx \right\rvert$	☐

Lösungsweg

$A = \int_1^3 \left(f(x) - g(x)\right) dx + \int_3^8 \left(g(x) - f(x)\right) dx$	☒
$A = \int_1^3 \left(f(x) - g(x)\right) dx - \int_3^8 \left(f(x) - g(x)\right) dx$	☒
$A = \left\lvert \int_1^3 \left(f(x) - g(x)\right) dx \right\rvert + \left\lvert \int_3^8 \left(f(x) - g(x)\right) dx \right\rvert$	☒

Lösungsschlüssel

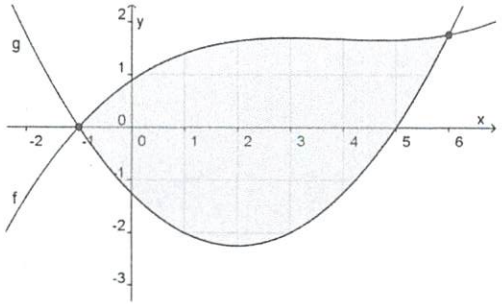
Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau drei Formeln angekreuzt sind und alle Kreuze richtig gesetzt sind.

Fläche zwischen zwei Kurven

Aufgabennummer: 1_095	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 4.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Die Funktionsgraphen von f und g schließen ein gemeinsames Flächenstück ein.



Aufgabenstellung:

Mit welchen der nachstehenden Berechnungsvorschriften kann man den Flächeninhalt des gekennzeichneten Flächenstücks ermitteln?

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Berechnungsvorschriften an!

$\int_{-1}^{6} [g(x) - f(x)]\mathrm{d}x$	☐
$\int_{-1}^{6} [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x$	☐
$\int_{-1}^{6} f(x)\mathrm{d}x + \int_{5}^{6} g(x)\mathrm{d}x - \int_{-1}^{5} g(x)\mathrm{d}x$	☐
$\int_{-1}^{6} f(x)\mathrm{d}x + \int_{-1}^{6} g(x)\mathrm{d}x$	☐
$\int_{-1}^{6} f(x)\mathrm{d}x - \int_{5}^{6} g(x)\mathrm{d}x + \left\lvert\int_{-1}^{5} g(x)\mathrm{d}x\right\rvert$	☐

Lösung

$\int_{-1}^{6} [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x$	☒
$\int_{-1}^{6} f(x)\mathrm{d}x - \int_{5}^{6} g(x)\mathrm{d}x + \left\lvert\int_{-1}^{5} g(x)\mathrm{d}x\right\rvert$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau zwei Antworten angekreuzt sind und beide Kreuze richtig gesetzt sind.

Aussagen zum Integral

Aufgabennummer: 1_030	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (x aus 5)	Grundkompetenz: AN 3.1

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Nachstehend werden Aussagen zu Funktionen und deren Stammfunktionen angeführt.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an!

Ist F eine Stammfunktion von f, so gilt: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.	☐
Die Stammfunktion einer Summe von zwei Funktionen f und g ist (abgesehen von Integrationskonstanten) gleich der Summe der Stammfunktionen von f und g.	☐
f ist immer eine Stammfunktion von f'.	☐
Wenn $\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = f(x)$, dann ist F eine Stammfunktion von f.	☐
Für beliebige Funktionen f und g gilt: $\int [f(x) \cdot g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \cdot \int g(x)\mathrm{d}x$.	☐

Lösung

Ist F eine Stammfunktion von f, so gilt: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.	☒
Die Stammfunktion einer Summe von zwei Funktionen f und g ist (abgesehen von Integrationskonstanten) gleich der Summe der Stammfunktionen von f und g.	☒
f ist immer eine Stammfunktion von f'.	☒
Wenn $\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = f(x)$, dann ist F eine Stammfunktion von f.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau vier Aussagen angekreuzt sind und alle Kreuze richtig gesetzt sind.

Stammfunktion

Aufgabennummer: 1_032	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Lückentext	Grundkompetenz: AN 3.1

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Es gilt die Aussage:
„Besitzt eine Funktion f eine Stammfunktion, so besitzt sie sogar unendlich viele. Ist nämlich F eine Stammfunktion von f, so ist für jede beliebige reelle Zahl c auch die durch $G(x) = F(x) + c$ definierte Funktion G eine Stammfunktion von f."
(Quelle: Wikipedia)

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

Ist die Funktion F eine Stammfunktion der Funktion f, dann gilt ___①___.
Gilt zudem ___②___, dann ist auch die Funktion G eine Stammfunktion von f.

①	
$F(x) = f(x)$	☐
$F(x) = f'(x)$	☐
$F'(x) = f(x)$	☐

②	
$G'(x) = F'(x) = f(x)$	☐
$G(x) = F(x) = f'(x)$	☐
$G'(x) = F(x) = f'(x)$	☐

Lösung

①	
$F'(x) = f(x)$	☒

②	
$G'(x) = F'(x) = f(x)$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn für beide Lücken ausschließlich der jeweils richtige Satzteil angekreuzt ist.

Stammfunktion erkennen

Aufgabennummer: 1_171	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 3.2

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben sind die Funktionen f und g und die Konstante $a \in \mathbb{R}^+$.
Es gilt der Zusammenhang $g'(x) = f(x)$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

f ist eine Stammfunktion von g.	☐
g ist eine Stammfunktion von f.	☐
$g - a$ ist eine Stammfunktion von f.	☐
$f + a$ ist eine Stammfunktion von g.	☐
$a \cdot g$ ist eine Stammfunktion von f.	☐

Lösungsweg

g ist eine Stammfunktion von f.	☒
$g - a$ ist eine Stammfunktion von f.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn nur zwei Aussagen angekreuzt sind und beide Kreuze richtig gesetzt sind.

Funktion und Stammfunktion

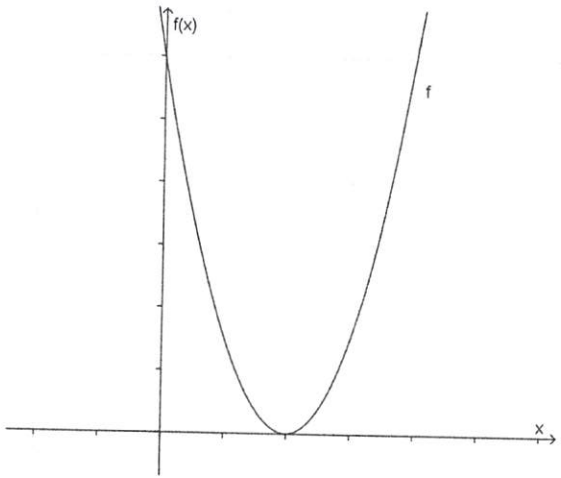
Aufgabennummer: 1_008	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: AN 3.2

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

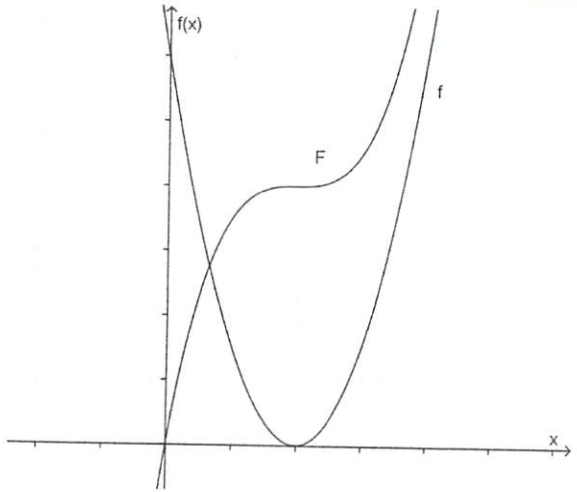
Die Abbildung zeigt den Graphen einer Polynomfunktion *f*.

Aufgabenstellung:

Zeichnen Sie den Graphen einer Stammfunktion *F* der Funktion *f* in die Abbildung ein!



Möglicher Lösungsweg



Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt als richtig gelöst, wenn der Graph der Funktion *F* im gesamten dargestellten Bereich monoton wachsend dargestellt wird und an der Stelle 2 einen deutlich erkennbaren Sattelpunkt aufweist.